REKURENCYJNA ESTYMACJA W SCHEMATACH ROTACYJNYCH

Jacek Wesołowski

Główny Urząd Statystyczny, Warszawa

Statystyka - Wiedza - Rozwój
ŁÓDŹ, 17-18 października 2013

Plan

Model matematyczny badań rotacyjnych

$(X_{i,t})_{i,t\in\mathbb{Z}}$ - nieskończona macierz zmiennych losowych,

i - numer badanej jednostki,

t - numer okazji.

$$\mathbb{E}\, X_{i,t} = \mu_t, \qquad \forall\, t \in \mathbb{Z}, \qquad \forall\, i \in \mathbb{Z},$$

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_{i,s},\, X_{k,t}) = \begin{cases} \rho^{|t-s|}, & \text{gdy } i = k, \\ 0, & \text{gdy } i \neq k, \end{cases}$$

gdzie $|\rho| \in (0, 1)$.

Wtedy $\mathbb{V}\mathrm{ar}\, X_{i,t} = 1$ (bez straty ogólności)

Próbka maksymalna

Próbka maksymalna (o liczebności N) ma postać

$$\mathbb{X}_t = (X_{t,t}, X_{t+1,t}, \ldots, X_{t+N-1,t})^T, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Wtedy

- $$\mathbb{E}\,\mathbb{X}_t = \mu_t\,\underline{1}, \qquad t \in \mathbb{Z},$$

  gdzie $\underline{1} = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^N$,

- $$\mathbb{C}\mathrm{ov}(\mathbb{X}_t, \mathbb{X}_{t-k}) = \mathbf{C}^k = (\mathbb{C}\mathrm{ov}(\mathbb{X}_t,\, \mathbb{X}_{t+k}))^T, \qquad k \geq 0,$$

  gdzie $\mathbf{C}$ jest macierzą $N \times N$, przy czym $\mathbf{C}_{i,t} = \rho\delta_{i+1,t}$, tzn.

Macierz $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \rho & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & \rho \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że $\mathbf{C}^N = 0$.

Np. dla $N = 4$ mamy

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Schemat kaskadowy

Niekoniecznie cały wektor $\mathbb{X}_t$ jest obserwowany.

Schemat kaskadowy definiowany jest przez wzorzec

$$\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)^T \in \{0,1\}^N$$

gdzie $\varepsilon_1 = \varepsilon_N = 1$.

Niech $n := \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j$.

Niech $H = \{j : \varepsilon_j = 0,\ j = 1, \ldots, N\}$. Wtedy $h := \# H = N - n$.

Luki i pokrycie

Luka rozmiaru m to maksymalny zbiór kolejnych zer we wzorcu, tzn. taki zbiór

$$\{j, j+1, \ldots, j+m-1\} \subset H, \quad \text{że } j-1,\ j+1 \notin H.$$

Pokryciem schematu p nazywamy powiększony o 1 rozmiar najwiekszej luki, tzn.

$$p = \max\{m :\ h_m > 0\} + 1,$$

gdzie h_m oznacza liczbę luk rozmiaru m.

Próbka efektywna

Próbka efektywna wyznaczona jest przez wzorzec $\underline{\varepsilon}$

$$\mathbb{Y}_t = (X_{t+k-1,t} : \ k \in \{1, \ldots, N\} \setminus H)^T, \qquad \forall\, t \in \mathbb{Z}.$$

Rozmiar próbki efektywnej wynosi n.

Przykłady schematów kaskadowych

- **Labour Force Survey (Australia)**, $h = 0$, $n = 6$
- **Labour Force Survey - BAEL (Polska)**, $h = 2$, $n = 4$
- **Current Population Survey (USA)**, $h = 8$, $n = 8$

$$\begin{pmatrix}
\ddots & & & & & & \\
\ddots & x & & & & & \\
\ddots & x & x & & & & \\
\ddots & 0 & x & x & & & \\
\ddots & 0 & 0 & x & x & & \\
\ddots & x & 0 & 0 & x & x & \\
 & x & x & 0 & 0 & x & x \\
 & & x & x & 0 & 0 & x \\
 & & & x & x & 0 & 0 \\
 & & & & x & x & 0 \\
 & & & & & x & x \\
 & & & & & & x
\end{pmatrix}$$

BLUE

Rozważamy BLUE $\hat{\mu}_t$ średniej μ_t w t-tej okazji wykorzystujący obserwacje $\mathbb{Y}_s$, $s \leq t$, tzn. estymator postaci

$$\hat{\mu}_t = \sum_{i=0}^{\infty} \underline{\tilde{w}}_i^T \, \mathbb{Y}_{t-i}, \qquad \text{gdzie } \; \underline{\tilde{w}}_i \in \mathbb{R}^n, \;\; i \geq 0$$

przy czym wagi $(\underline{\tilde{w}}_i)$ minimalizują $\mathbb{V}\mathrm{ar}\,\hat{\mu}_t$ przy więzach wynikających z nieobciążoności:

$$\underline{\tilde{w}}_0^T \, \underline{1} = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \underline{\tilde{w}}_i^T \, \underline{1} = 0, \;\; i \geq 1.$$

BLUE - postać alternatywna - W. Niemiro

Równoważnie,

$$\hat{\mu}_t = \sum_{i=0}^{\infty} \underline{w}_i^T \mathbb{X}_{t-i}, \qquad \text{gdzie } \underline{w}_i \in \mathbb{R}^N, \quad i \geq 0,$$

przy czym wagi $(\underline{w}_i)$ minimalizują $\mathbb{V}\mathrm{ar}\,\hat{\mu}_t$ przy więzach wynikających z nieobciążoności:

$$\underline{w}_0^T \underline{1} = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \underline{w}_i^T \underline{1} = 0, \quad i \geq 1.$$

i przy więzach wynikających z postaci wzorca $\underline{\varepsilon}$:

$$\underline{w}_i^T \underline{e}_j = 0, \qquad \forall\, i \geq 0, \qquad j \in H,$$

gdzie $\underline{e}_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^N$ z 1 na pozycji j-tej.

Rekurencja dla BLUE średniej - problem Pattersona

Dla dowolnego $t \in \mathbb{Z}$ poszukujemy rekurencji postaci

$$\hat{\mu}_t = \sum_{i=1}^{s} a_i \, \hat{\mu}_{t-i} + \sum_{j=0}^{s} \underline{r}_j^T \, \mathbb{X}_{t-j},$$

gdzie s - liczba naturalna, $(a_i)_{i=1,\ldots,s}$ - współczynniki liczbowe, i $(\underline{r}_i)_{i=0,1,\ldots,s}$ - współczynniki wektorowe SĄ NIEZNANE.

Rozwiązanie tego problemu zostało znalezione przy pewnych technicznych założeniach. Eksperymenty numeryczne sugerują, że założenia te są uniwersalnie spełnione.

OSTRZEŻENIE: Rozwiązanie jest skomplikowane. Jego uzasadnienie wykorzystuje własności operatorów "shiftu" oraz wielomianów Czebyszewa.

Wielomian macierzowy $\mathbf{T}_m$

Niech T_k będzie k-tym wielomianem Czebyszewa pierwszego rodzaju, tzn.

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Definiujemy wielomian macierzowy wymiaru $m \times m$

$$\mathbf{T}_m = \begin{bmatrix} T_0 & T_1 & T_2 & \cdots & T_{m-2} & T_{m-1} \\ T_1 & T_0 & T_1 & \cdots & T_{m-3} & T_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ T_{m-2} & T_{m-3} & T_{m-4} & \cdots & T_0 & T_1 \\ T_{m-1} & T_{m-2} & T_{m-3} & \cdots & T_1 & T_0 \end{bmatrix}$$

Macierz odwracalna $\mathbf{R}_m$

Definiujemy trójdiagonalną macierz nieosobliwą wymiaru $m \times m$ wzorem

$$\mathbf{R}_m = \begin{bmatrix} 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1+\rho^2 \end{bmatrix}.$$

Wielomian Q_p

Dla wzoru schematu $\underline{\varepsilon}$ o rozmiarach luk $m_1, \ldots, m_s$ i pokryciu p definiujemy wielomian Q_p (stopnia p) wzorem

$$Q_p(x) = 1 - \rho^2 + (N-1)(1 + \rho^2 - 2\rho x)$$

$$-(1 + \rho^2 - 2\rho x)^2 \sum_{j=1}^{s} \text{trace}\left(\mathbf{T}_{m_j}(x)\,\mathbf{R}_{m_j}^{-1}\right).$$

Macierz **S** wymiaru $(ph+h+1)p \times \, p(h+1)$

Dla $d_1, \ldots, d_p \in \mathbb{C}$ definiujemy macierz blokową $\mathbf{S} = \mathbf{S}(d_1, \ldots, d_p)$ wzorem

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{G}}(d_1) & \widetilde{\mathbf{G}}(d_2) & \cdots & \widetilde{\mathbf{G}}(d_p) \\ \mathbf{G}(d_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{G}(d_2) & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{G}(d_p) \end{bmatrix},$$

gdzie $\widetilde{\mathbf{G}}(d_i)$ i $\mathbf{G}(d_i)$, $i = 1, \ldots, p$, są macierzami wymiaru $(h+1) \times (h+1)$ oraz wymiaru $h \times (h+1)$, odpowiednio.

Bloki typu $\widetilde{\mathbf{G}}$ wymiaru $(h+1) \times (h+1)$

$$\widetilde{\mathbf{G}}(d) = \frac{1}{1-\rho^2} \left[\begin{array}{cc} (N-1)(1-d\rho) + 1 - \rho^2 & (1-d\rho)\underline{1}_h^T \\ (1-d\rho)\underline{1}_h & \mathrm{diag}(\widetilde{\mathbf{H}}_{m_1}, \ldots, \widetilde{\mathbf{H}}_{m_s}) \end{array} \right]$$

gdzie $\widetilde{\mathbf{H}}_m(d)$ są górnymi macierzami dwu-diagonalnymi wymiaru $m \times m$ postaci

$$\widetilde{\mathbf{H}}_m(d) = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -d\rho & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -d\rho \\ & & & 1 \end{array} \right].$$

Bloki typu $\mathbf{G}(d)$ wymiaru $h \times (h+1)$

$$\mathbf{G}(d) = \frac{1}{1-\rho^2}\left[(1-d\rho)(d-\rho)\underline{1}_h,\ d\,\mathrm{diag}(\mathbf{H}_{m_1},\ldots,\mathbf{H}_{m_s})\right],$$

gdzie $\mathbf{H}_m = \mathbf{H}_m(d)$ jest macierzą trójdiagonalną wymiaru $m \times m$ postaci

$$\mathbf{H}_m(d) = \begin{bmatrix} 1+\rho^2 & -d\rho & & \\ -\rho/d & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -d\rho \\ & & -\rho/d & 1+\rho^2 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Przypomnienie: $m_1 + \ldots + m_s = h$.

Uwaga

Niech $x \in \mathbb{C}$ oraz $\Im x \neq 0$ lub $\Re x \notin [-1, 1]$. Wtedy równanie

$$\frac{1}{2}\left(d + \frac{1}{d}\right) = x$$

z niewiadomą d ma dokładnie dwa pierwiastki, $d_+(x)$ i $d_-(x)$:

$$|d_-(x)| < 1 \qquad \text{oraz} \qquad |d_+(x)| > 1.$$

Założenia

ZAŁOŻENIE I: Wielomian Q_p ma różne pierwiastki $x_1, \ldots, x_p \notin [-1, 1]$.

ZAŁOŻENIE II: Macierz $\mathbf{S} = \mathbf{S}(d_1, \ldots, d_p)$, gdzie $d_i = d_-(x_i)$, $i = 1, \ldots, p$, ma pełny rząd.

Twierdzenie

Jeśli spełnione są ZAŁOŻENIA I i II, to $\forall\, t \in \mathbb{Z}$

$$\hat{\mu}_t = \sum_{k=1}^{p} a_k \hat{\mu}_{t-k} + \sum_{k=0}^{p} \underline{r}_k^T \mathbb{X}_{t-k} \qquad (2)$$

przy czym

$$a_k = (-1)^{k+1} \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_k \le p} d_{j_1} \ldots d_{j_k}, \quad k = 1, \ldots, p, \qquad (3)$$

oraz dla $i = 0, 1, \ldots, p$*,*

$$\underline{r}_i = \sum_{m=1}^{p} \left[\left(v_i(d_m)\mathbf{I} - v_{i-1}(d_m)\mathbf{C}^T \right) \mathbf{N}(d_m) \sum_{j \in \{0\} \cup H} c_{j,m} \underline{e}_j \right],$$

Twierdzenie, c.d.

gdzie $\mathbf{N}(d) = (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{C}^T)^{-1}(\mathbf{I} - d\mathbf{C})$, $\underline{e}_0 = \underline{1}$, $v_0(d) = 1$, $v_{-1}(d) = 0$,

$$v_i(d) = d^i - \sum_{l=1}^{i} a_l d^{i-l}, \quad i = 1, \ldots, p, \tag{4}$$

oraz

$$\underline{c} = [(c_{01}, c_{11} \ldots, c_{h1}),\ (c_{02}, c_{12}, \ldots, c_{h2}),\ \ldots,\ (c_{0p}, c_{1p}, \ldots, c_{hp})]^T$$

jest jedynym rozwiązaniem równania

$$\mathbf{S}\underline{c} = (1, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^{p(h+1)}.$$

$h = 0$, $p = 1$

LFS w Australii ($N = n = 6$), LFS w Kanadzie ($N = n = 8$).

Wielomian $Q_p = Q_1$ ma postać

$$Q_1(x) = (N-1)(1+\rho^2-2\rho x) + 1 - \rho^2$$

ma jedyny pierwiastek (rzeczywisty)

$$x_1 = -\frac{1+\rho^2}{-2\rho} - \frac{1-\rho^2}{2(N-1)\rho}.$$

Mamy $|x_1| > \frac{1+\rho^2}{2|\rho|} > 1$.

ZAŁOŻENIE I jest spełnione.

$h = 0$, $p = 1$, c.d.

Ponieważ

$$d_1 = d_-(x_1) = \frac{N+(N-2)\rho^2-\sqrt{[N+(N-2)\rho^2]^2-4(N-1)^2\rho^2}}{2(N-1)\rho}.$$

więc macierz **S** wymiaru 1×1 ma postać

$$\mathbf{S} = \left[(N-1)\tfrac{1-d_1\rho}{1-\rho^2} + 1\right] \neq \mathbf{0}.$$

ZAŁOŻENIE II jest również spełnione.

$h = 0$, $p = 1$, c.d.

Z tw. 3.1 mamy

$$\hat{\mu}_t = a_1 \hat{\mu}_{t-1} + \underline{r}_0^T \mathbb{X}_t + \underline{r}_1^T \mathbb{X}_{t-1},$$

gdzie

$$\begin{cases} a_1 = d_1 \\ \underline{r}_0 = c_{0,1}\, \mathbf{N}(d_1)\, \underline{1}, \\ \underline{r}_1 = -c_{0,1} \mathbf{C}^T \mathbf{N}(d_1)\, \underline{1}, \end{cases},$$

oraz

$$c_{0,1} = \frac{1}{(N-1)\frac{1-d_1\rho}{1-\rho^2}+1}.$$

$h = 0$, $p = 1$, c.d.

Np. dla $N = 6$ i $\rho = 0.9$

$$\hat{\mu}_t = 0.7942\,\hat{\mu}_{t-1} + \begin{bmatrix} 0.1765 \\ 0.1765 \\ 0.1765 \\ 0.1765 \\ 0.1765 \\ 0.1176 \end{bmatrix}^T \mathbb{X}_t + \begin{bmatrix} 0.0000 \\ -0.1588 \\ -0.1588 \\ -0.1588 \\ -0.1588 \\ -0.1588 \end{bmatrix}^T \mathbb{X}_{t-1}.$$

$p = 2$

Wielomian $Q_p = Q_2$ ma postać form:

$$Q_2(x) = -\frac{4h\rho^2}{1+\rho^2}x^2 - 2(N-h-1)\rho x + (N-1)(1+\rho^2) + 1 - \rho^2.$$

Nietrudno wykazać, że dla jego pierwiastków x_1, x_2 zachodzi nierówność $|x_{1,2}| > \frac{1+\rho^2}{2|\rho|} > 1$. Czyli ZAŁOŻENIE I jest spełnione.

$p = 2$, c.d.

Z postaci macierzy **S** wynika,że

$$c_{1,1} = c_{2,1} = \ldots = c_{h,1} \qquad \text{oraz} \qquad c_{1,2} = c_{2,2} = \ldots = c_{h,2}.$$

Dlatego zamiast $\mathbf{S}\underline{c} = \underline{e}$ wystarczy rozważyć równoważne równanie

$$\widetilde{\mathbf{S}}(c_{0,1},\, c_{1,1},\, c_{0,2},\, c_{1,2})^T = (1,\, 0,\, 0,\, 0)^T$$

gdzie $\widetilde{\mathbf{S}} = \frac{1}{1-\rho^2} \times$

$$\begin{bmatrix} (N-1)(1-d_1\rho)+1-\rho^2 & h(1-d_1\rho) & (N-1)(1-d_2\rho)+1-\rho^2 & h(1-d_2\rho) \\ 1-d_1\rho & 1 & 1-d_2\rho & 1 \\ (1-d_1\rho)(d_1-\rho) & d_1(1+\rho^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-d_2\rho)(d_2-\rho) & d_2(1+\rho^2) \end{bmatrix},$$

oraz $d_i = d_-(x_i)$, $i = 1, 2$. Pokazuje się, że układ ten ma jednoznaczne rozwiązanie.

$p = 2$, c.d.

Z tw. 3.1 mamy zatem

$$\hat{\mu}_t = a_1 \hat{\mu}_{t-1} + a_2 \hat{\mu}_{t-2} + \underline{r}_0^T \mathbb{X}_t + \underline{r}_1^T \mathbb{X}_{t-1} + \underline{r}_2^T \mathbb{X}_{t-2},$$

gdzie

$$\begin{cases} a_1 = d_1 + d_2 \\ a_2 = -d_1 d_2 \\ \underline{r}_0 = \mathbf{N}(d_1) \left[(c_{0,1} + c_{1,1}) \underline{1} - c_{1,1} \underline{\varepsilon} \right] + \mathbf{N}(d_2) \left[(c_{0,2} + c_{1,2}) \underline{1} - c_{1,2} \underline{\varepsilon} \right] \\ \underline{r}_1 = -(d_2 \mathbf{I} + \mathbf{C}^T) \mathbf{N}(d_1) \left[(c_{0,1} + c_{1,1}) \underline{1} - c_{1,1} \underline{\varepsilon} \right] \\ \qquad -(d_1 \mathbf{I} + \mathbf{C}^T) \mathbf{N}(d_2) \left[(c_{0,2} + c_{1,2}) \underline{1} - c_{1,2} \underline{\varepsilon} \right] \\ \underline{r}_2 = d_2 \mathbf{C}^T \mathbf{N}(d_1) \left[(c_{0,1} + c_{1,1}) \underline{1} - c_{1,1} \underline{\varepsilon} \right] \\ \qquad + d_1 \mathbf{C}^T \mathbf{N}(d_2) \left[(c_{0,2} + c_{1,2}) \underline{1} - c_{1,2} \underline{\varepsilon} \right] \end{cases}$$

$p = 2$, c.d.

N.p. dla $N = 7$, $h = 2$, $H = \{3, 6\}$ oraz $\rho = 0.5$ mamy

$$Q_2(x) = -1.6x^2 - 2x + 5.75,$$

$$\begin{cases} x_1 = -2.6211 \\ x_2 = \ \ 1.3711 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \qquad d_+(x_1) = -5.0439 \\ d_1 = d_-(x_1) = -0.1983 \\ \qquad d_+(x_2) = \ \ 2.3091 \\ d_2 = d_-(x_2) = \ \ 0.4331 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0.2348 \\ a_2 = 0.0859 \end{cases}$$

Rekurencja ma postać

$$\hat{\mu}_t = 0.2348\ \hat{\mu}_{t-1} + 0.0859\ \hat{\mu}_{t-2} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0.2171 \\ 0.1904 \\ 0.0000 \\ 0.2171 \\ 0.1904 \\ 0.0000 \\ 0.1850 \end{bmatrix}^T \mathbb{X}_t + \begin{bmatrix} -0.0093 \\ -0.1086 \\ 0.0000 \\ -0.0093 \\ -0.1086 \\ 0.0000 \\ 0.0010 \end{bmatrix}^T \mathbb{X}_{t-1} + \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0047 \\ 0.0000 \\ -0.0476 \\ 0.0047 \\ 0.0000 \\ -0.0476 \end{bmatrix}^T \mathbb{X}_{t-2}$$

$p = 3$, $h = 2$

Schemat Szarkowskiego stosowany jest w BAELu w GUS. Jest to schemat o wzorze

$$\underline{\varepsilon} = (1, 1, 0, 0, 1, 1)^T,$$

czyli $N = 6$, $H = \{3, 4\}$, $h_2 = 1$, $h_1 = 0$. Zatem

$$Q_3(x) = 5(1+\rho^2-2\rho x)+1-\rho^2-2(1+\rho^2-2\rho x)^2\frac{\rho x+1+\rho^2}{1+\rho^2+\rho^4}.$$

$p = 3$, $h = 2$, c.d.

W pracy z SiTns z (2010) pokazałem, że dla dowolnego $|\rho| \in (0, 1)$:

- wielomian Q_3 ma dwa pierwiastki zespolone (sprzężone) x_1, x_2 i jeden rzeczywisty $x_3 \notin [-1, 1]$, czyli ZAŁOŻENIE I jest spełnione;
- macierz **S** (wymiaru 9×9) jest odwracalna, czyli ZAŁOŻENIE II jest też spełnione.

$p = 3, \ h = 2, 2-2-2$, c.d.

Współczynniki a_1, a_2, a_3 zależą od $d_1 = d_-(x_1)$, $d_2 = d_-(x_2) = d_1^*$ and $d_3 = d_-(x_3)$ w następujący sposób

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = d_1 + d_2 + d_3 \\ a_2 = -(d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_1 d_3) \\ a_3 = d_1 d_2 d_3 \end{array} \right. .$$

$p = 3$, $h = 2$, c.d.

Np. dla $\rho = 0.7$ otrzymujemy

$$\begin{cases} x_1 = -0.5668 - 1.4069\imath \\ x_2 = -0.5668 + 1.4069\imath \\ x_3 = 1.1336 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phantom{d_1 = {}} d_+(x_1) = -1.0368 - 3.1035\imath \\ d_1 = d_-(x_1) = -0.0968 + 0.2899\imath \\ \phantom{d_2 = {}} d_+(x_2) = -1.0368 + 3.1035\imath \\ d_2 = d_-(x_2) = -0.0968 - 0.2899\imath \\ \phantom{d_3 = {}} d_+(x_3) = 1.6675 \\ d_3 = d_-(x_3) = 0.5997 \end{cases}.$$

Rekurencja ma postać

$$\hat{\mu}_t = 0.4060\,\hat{\mu}_{t-1} + 0.0227\,\hat{\mu}_{t-2} + 0.0560\,\hat{\mu}_{t-3} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0.2862 \\ 0.2217 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.2862 \\ 0.2059 \end{bmatrix}^T \mathbb{X}_t + \begin{bmatrix} -0.0036 \\ -0.2004 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ -0.0036 \\ -0.1984 \end{bmatrix}^T \mathbb{X}_{t-1} + \begin{bmatrix} -0.0143 \\ 0.0026 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ -0.0143 \\ 0.0033 \end{bmatrix}^T \mathbb{X}_{t-2} + \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0100 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ -0.0760 \\ 0.0100 \end{bmatrix}^T \mathbb{X}_{t-3}$$

$p = 9$, $h = 8$

W schemacie 4-8-4 (wykorzystywanym w USA w CPS) mamy

$$\underline{\varepsilon} = (1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1)^T.$$

Zatem $N = 16$, $h = 8$ oraz $H = \{5, \ldots, 12\}$.

Wielomian $Q_p = Q_9$ stopnia 9 ma postać

$$Q_9(x) = 15(1+\rho^2-2\rho x)+1-\rho^2-(1+\rho^2-2\rho x)^2 \,\mathrm{tr}\left(\mathbf{T}_8(x)\,\mathbf{R}_8^{-1}\right).$$

Analizowany był numerycznie.

$p = 9$, $h = 8$, c.d.

Np. dla $\rho = 0.9$, wielomian Q_9 ma 8 różnych pierwiastków zespolonych (sprzężonych parami) i 1 pierwiastek rzeczywisty

$$\left\{\begin{array}{ll} x_1 &= -0.7667 - 0.0208\imath \\ x_2 &= -0.7667 + 0.0208\imath \\ x_3 &= -0.1746 - 0.0320\imath \\ x_4 &= -0.1746 + 0.0320\imath \\ x_5 &= 0.4989 - 0.0284\imath \\ x_6 &= 0.4989 + 0.0284\imath \\ x_7 &= 0.9391 - 0.0121\imath \\ x_8 &= 0.9391 + 0.0121\imath \\ x_9 &= -1.0006 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} d_1 &= d_-(x_1) = -0.7419 - 0.6220\imath \\ d_2 &= d_-(x_2) = -0.7419 + 0.6220\imath \\ d_3 &= d_-(x_3) = -0.1689 - 0.9532\imath \\ d_4 &= d_-(x_4) = -0.1689 + 0.9532\imath \\ d_5 &= d_-(x_5) = 0.4825 - 0.8389\imath \\ d_6 &= d_-(x_6) = 0.4825 + 0.8389\imath \\ d_7 &= d_-(x_7) = 0.9064 - 0.3335\imath \\ d_8 &= d_-(x_8) = 0.9064 + 0.3335\imath \\ d_9 &= d_-(x_9) = -0.9682 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} a_1 &= 0.7429 \\ a_2 &= 0.0019 \\ a_3 &= 0.0023 \\ a_4 &= 0.0029 \\ a_5 &= 0.0037 \\ a_6 &= 0.0049 \\ a_7 &= 0.0066 \\ a_8 &= 0.0088 \\ a_9 &= 0.0119 \end{array}\right. .$$

Schematy z jedną luką

Ostatnio udało się pokazać (wspólnie z A. Smoktunowicz z Politechniki Warszawskiej), że w schematach z jedną luką ZAŁOŻENIE 1 jest zawsze spełnione.

Pytanie, czy w schematach z jedną luką zawsze spełnione jest ZAŁOŻENIE 2, pozostaje OTWARTE.